

Equation différentielle du premier ordre et résolution

Equation différentielle : $\frac{dy}{dt} = a y + b$

Solution générale : $y = k e^{-t/\tau} - b/a$

Adaptation à la charge du condensateur : $E = R i + U_c$ et $i = dq/dt = C dU_c / dt$

Donc

$$\frac{dU_c}{dt} = (E - U_c) / RC \quad \text{donc} \quad a = -1/RC \quad \text{et} \quad b = E/RC$$

Alors

$$U_c = k e^{-t/\tau} - b/a = k e^{-t/\tau} + E$$

Conditions initiales : $U_c = 0$ à $t = 0$ alors $k = -E$ donc

$$U_c = E (1 - e^{-t/\tau})$$

Constante de temps τ :

Par dérivation de la fonction ci-dessus on obtient :

$$\frac{dU_c}{dt} = E e^{-t/\tau} / \tau$$

Or l'équation différentielle donne :

$$\frac{dU_c}{dt} = (E - E (1 - e^{-t/\tau})) / RC = E e^{-t/\tau} / RC$$

On obtient alors par identification : $\tau = RC$

ou encore $\tau = \sum R C$ si le circuit comporte plusieurs résistances, dont celle du générateur.