Mesure, incertitude, notations scientifique, arrondissage, présentation d'un résultat

1. INCERTITUDES

Incertitudes de type B

Exemple 1 : mesure de volume avec une burette (incertitude de résolution et de tolérance)

	résultats
$S_{\text{résolution (graduation)}}$	$S_{rés} = 2 \times 0{,}1 / \sqrt{12} = 0{,}0577$ mL car double lecture (0 et V)
$S_{\text{tolérence}}$ (dépend de la "classe")	$S_{tol} = 0{,}05 / \sqrt{3} = 0{,}0288$ mL
S (incertitude type)	$S = \sqrt{(s_{rés}^2 + s_{tol}^2)} = 0{,}0644$ mL
ΔV (incertitude type élargie)	$\Delta V = 2 \times 0{,}0644 = 0{,}128$ mL $= 0{,}13$ mL k = 2 pour taux de confiance 95%
Résultat	$V = 22{,}15 \pm 0{,}13$ mL ou $V = 22{,}2 \pm 0{,}1$ mL (2 chiffres significatifs ou un seul)
Précision	$\Delta V / V = 0{,}13/22{,}15 = 0{,}6$ %

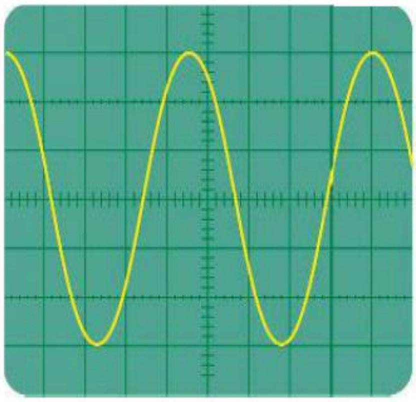
Exemple 2 : mesure de période à l'oscilloscope (ou en Exao) et calcul de fréquence

$2\,T = 9 \times 500.10^{-6}$ donc $T = 2{,}25.10^{-3}$ s

$\Delta T = 2 \times 2 \times 0{,}2 \times 500.10^{-6} / \sqrt{12} / 2 = 5{,}77.10^{-5}$ s $= 0{,}06.10^{-3}$ s
(graduation = 0,2 div = $0{,}2 \times 500\ 10^{-6}$ s
double lecture donc x 2 et k = 2 donc x 2,
mais mesure de 2T donc division par 2)

résultat : $T = 2{,}25.10^{-3} \pm 0{,}06\ 10^{-3}$ s (k = 2)
précision : $\Delta T / T = 0{,}027 = 2{,}7$ %

calcul de la fréquence $f = 1 / T = 444{,}4$ Hz
$\Delta f / f = \Delta T / T = 2{,}7$ % donc $\Delta f = 0{,}027 \times 444{,}4 = 12$
résultat : $f = 444 \pm 12$ Hz (k = 2)



Réglages de l'oscilloscope
– Sensibilité : $a = 200$ mV·div^{-1}.
– Durée de balayage : $b = 500$ µs·div^{-1}.

Incertitudes de type A si on a un ensemble statistique de résultats de mesurage d'un même mesurande (même grandeur à mesurer)

$$m = \overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$$

Résultat = moyenne

(calculs avec les calculatrices)

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}$$

Ecart type ($S_{exp} = \sigma$)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}}\, s_{exp}$$

Incertitude type S
et incertitude élargie : $\Delta m = 2\,S$ pour $k = 2$

2. CAS DE PLUSIEURS SOURCES D'INCERTITUDE INDEPENDANTES

Relation additive : $c = a + b$ ou $c = a - b$

$$\boxed{\Delta c = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}}$$

Relation multiplicative : $c = a \times b$ ou $c = a / b$

$$\boxed{\frac{\Delta c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}}$$

3. PRESENTATION D'UN RESULTAT

Notation scientifique

Exemple : L = 0,06520 m comporte 4 chiffres significatifs (6520)

La notation scientifique est de la forme $a.10^n$ avec $0 < a < 10$ et n entier
En notation scientifique on écrit : $L = 6,520 \times 10^{-2}$ m (on a bien 4 chiffres significatifs)

Arrondissage de la valeur numérique du résultat de mesure

L'incertitude élargie est donnée avec au plus 2 chiffres significatifs.

Pour la valeur numérique du résultat le dernier chiffre à retenir est celui qui a la même position que le dernier chiffre significatif dans l'expression de l'incertitude

Exemple : Y = 125,4596 ΔY = 1,2 alors : Y = 125,5 ± 1,2

Il faut arrondir le résultat obtenu par un calcul afin d'exprimer le résultat avec un nombre de chiffres significatifs égale à celui de la donnée utilisée la moins précise.

Exemple : 3,45 x 1,2 = 4,1400 arrondi à 4,1 (l'une des donnée du calcul n'a que deux chiffres significatifs)

Cas particuliers :

- Si un élément du calcul est a une valeur exacte (par exemple le nombre 10 dans 10xT pour la mesure de 10 périodes, ou le nombre 1 dans le calcul de f = 1 / T), son nombre de chiffre significatif n'intervient pas
- Pour une somme c'est le nombre de chiffres après la virgule qui limite le nombre de chiffres significatifs

Exemple : si on additionne deux longueurs L_1 = 15,3 m et L2 = 1,43 m L = 15,3 + 1,43 = 16,73 m est arrondi à 16,7 m (comme la donnée la moins précise : L_1 = 15,3 m)

Par contre si on a L_1 = 15,30 m et L_2 = 1,43 m alors L = 15,30 + 1,43 = 16,73 m

Présentation du résultat : le résultat d'une mesure n'est jamais une valeur ; il sera donné sous la forme d'un intervalle des valeurs probables du mesurande. *On détermine donc un intervalle de confiance: le mesurande est compris dans l'intervalle :* ***[m - ΔM ; m + ΔM]***

Ecriture normalisée : M = m ± Δm (avec l'unité et éventuellement le taux de confiance)

Précision : Δm / m (exprimée en pourcentage)

Voir exemples plus haut : V = 22,15 ± 0,13 mL (k=2) ΔV/V = 0,6 %

EXERCICES

1. Mesures multiples d'une longueur avec un réglet

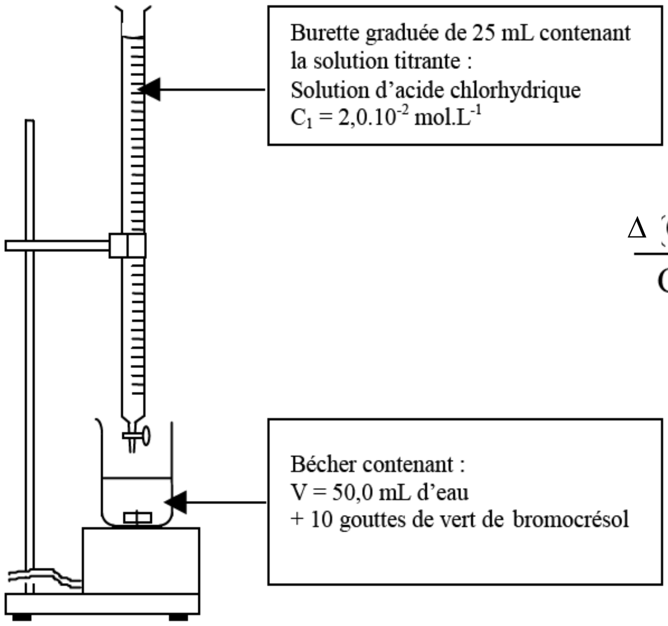
graduation = 0,5 mm, double lecture, pas d'indication de tolérance.
Mesures multiples :

L(cm)	12,25	12,20	12,20	12,25	12,30	12,15	12,30	12,25	12,25

2. Détermination de la masse volumique d'un liquide mesure unique de masse et mesure unique de volume $\rho = m / V$

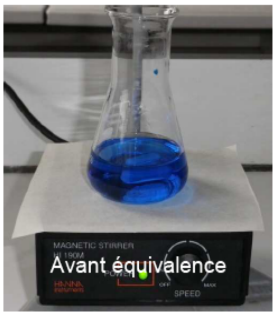
Balance numérique : affichage au 1/10 g, pas d'autre indication du constructeur ;
mesures : fiole vide $m_1 = 75{,}2$ g ; fiole pleine $m_2 = 163{,}8$ g
Fiole jaugée classe A : V = 100 mL, tolérance : 0,1 mL
on suppose que l'opérateur sait ajuster le trait de jauge ; température adéquate

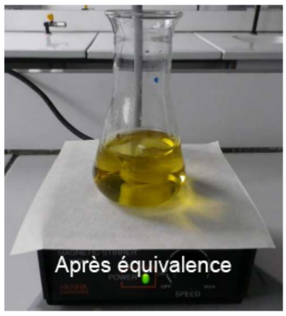
3. Titrage : détermination de la concentration molaire des ions HCO3- dans une eau minérale par titrage colorimétrique



$$C = \frac{C_1 \cdot V_{1E}}{V}$$

$$\frac{\Delta\,(C)}{C} = \sqrt{\left[\frac{\Delta\,(C_1)}{C_1}\right]^2 + \left[\frac{\Delta\,(V_{1E})}{V_{1E}}\right]^2 + \left[\frac{\Delta\,(V)}{V}\right]^2}$$





Données :

$\Delta C_1 / C_1 = 0{,}15$ % (préparation laboratoire)
Burette (mesure de V_{1E}) : tolérance 0,05 mL résolution 0,1 mL double lecture
dilatation négligeable (température adéquate)
mesure de $V_{1E} = 9{,}2$ mL
Pipette de 25 mL (volume d'eau V) : tolérance 0,05 mL , ajustements trait de jauge supposés corrects

$M(HCO_3) = 61$ g.mol^{-1}

CORRIGES

1.

moyenne	12,24
S_{exp} (écart type)	0,0458
$\Delta L_{stat} = S = S_{exp}/\sqrt{n}$	0,0153

$\Delta L_{res} = 2 \times 0{,}05 / \sqrt{12} = 0{,}029$ (en cm)

En tenant compte de l'incertitude statistique (utilisation du réglet) et de l'incertitude de résolution :
$S = \sqrt{(s_{rés}^2 + s_{stat}^2)} = \sqrt{(0{,}029^2 + 0{,}0153^2)} = 0{,}033$
Incertitude élargie (k = 2) : $\Delta L = 0{,}066$ cm

Résultat : $L = 12{,}24 \pm 0{,}07$ cm (k = 2)
Precision $\Delta L / L = 0{,}6$ %

2. $m = m_2 - m_1 = 163{,}8 - 75{,}2 = 88{,}6$ g $\rho = m / V = 88{,}6 / 100 = 0{,}886$ $g.mL^{-1}$
Incertitude sur m :
$\Delta m_1 = \Delta m_2 = 2 \times 0{,}1 / \sqrt{12} = 0{,}058$ g (k = 2)
Additif : $\Delta m = \sqrt{(\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2)} = 0{,}058 \times \sqrt{2} = 0{,}082$ g
$\Delta m / m = 0{,}082 / 88{,}6 = 9{,}2\ 10^{-4}$

Incertitude sur le volume : $\Delta V = 2 \times 0{,}1 / \sqrt{3} = 0{,}116$ mL (k=2) $\Delta V / V = 0{,}116 / 100 = 1{,}16\ 10^{-3}$

Incertitude sur ρ :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left[\frac{\Delta m}{m}\right]^2 + \left[\frac{\Delta V}{V}\right]^2} = 1{,}48\ 10^{-3} \qquad \Delta\rho = 1{,}3\ 10^{-3} = 0{,}0013\ g.mL^{-1}$$

Résultat : $\rho = 0{,}8860 \pm 0{,}0013$ $g.mL^{-1}$
Précision : $\Delta\rho / \rho = 1{,}5\ 10^{-3} = 0{,}15$ %

3. incertitude burette : $\Delta V_{1E} = 2 \times \sqrt{(s_{rés}^2 + s_{tol}^2)} = 0{,}224$ mL (k = 2)
$\Delta V_{1E} / V_{1E} = 0{,}224 / 9{,}2 = 2{,}43\ 10^{-2}$
incertitude pipette : $\Delta V = 2 \times 0{,}1 / \sqrt{3} = 0{,}1155$ mL (k = 2)
$\Delta V / V = 0{,}1155 / 25 = 4{,}6\ 10^{-3}$

$$\frac{\Delta(C)}{C} = \sqrt{\left[\frac{\Delta(C_1)}{C_1}\right]^2 + \left[\frac{\Delta(V_{1E})}{V_{1E}}\right]^2 + \left[\frac{\Delta(V)}{V}\right]^2}$$

$\Delta C / C = 2{,}5\ 10^{-2}$

Or $C = 2{,}0\ 10^{-2} \times 9{,}2 / 25 = 7{,}36\ 10^{-3}$ $mol.L^{-1}$ alors $\Delta C = 0{,}184\ 10^{-3}$ $mol.L^{-1}$

Résultat : $C = (7{,}4 \pm 0{,}2) \times 10^{-3}$ $mol.L^{-1}$ (k=2) **précision : $\Delta C / C = 0{,}2 / 7{,}4 =$ 2,7 %**

Titre massique (ou concentration massique) :
$t = C . M = 0{,}45$ $g.L^{-1}$ $\Delta t = M . \Delta C = 0{,}02$ $g.L^{-1}$ **$t = 0{,}45 \pm 0{,}02$ $g.L^{-1}$**