Expression plus précise de la période des oscillations

En séparant les variables dans :

$$\frac{m \cdot l^2 \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2}{2} - m \cdot g \cdot l \cdot cos\theta = -m \cdot g \cdot l \cdot cos\theta_o$$

$$\frac{m \cdot l^2 \cdot (\frac{d\theta}{dt})^2}{2} = m \cdot g \cdot l(cos\theta - cos\theta_o) \qquad (dt)^2 = \frac{l \cdot (d\theta)^2}{g \cdot (cos\theta - cos\theta_o)}$$

$$(dt) = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{(cos\theta - cos\theta_o)}}$$

on obtient l'expression exacte de la période d'oscillations d'amplitude θ_o qui est :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(\sin\frac{\theta_0}{2}) = T_0 \frac{2K(\sin\frac{\theta_0}{2})}{\pi}$$

où K est une intégrale elliptique complète de première espèce qui vaut en première approximation

$$(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$$

Et

$$T_0 = 2.\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

L'expression

$$T = T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$$

est connue sous le nom de formule de Borda.

Évaluation de la qualité des approximations faites

θ**(degrés)**	θ**(radians)**	$1 + \frac{\theta_0^2}{16}$	**Développement en série**	$\frac{2K(\sin\frac{\theta_0}{2})}{\pi}$
10	0,175	1,00	1,00	1,00
20	0,349	1,01	1,01	1,01
30	0,524	1,02	1,02	1,02
40	0,698	1,03	1,03	1,03
50	0,873	1,05	1,05	1,05
60	1,047	1,07	1,07	1,07
70	1,222	1,09	1,10	1,10
80	1,396	1,12	1,14	1,14
90	1,571	1,15	1,18	1,18