Formulation mathématique

https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_%C3%A0_N_corps

Le **problème à *N* corps** consiste à résoudre les équations du mouvement de Newton de *N* corps interagissant gravitationnellement, connaissant leurs masses ainsi que leurs positions et vitesses initiales. […]

Formulation mathématique

Le problème à N corps est modélisé par une équation différentielle. Étant donné les valeurs initiales des positions $q_j(0)$ et des vitesses $\dot{q}_j(0)$ des *N* particules (j = 1, 2, …, N) avec $q_j(0) \neq q_k(0)$ pour tout j et k distincts, il s'agit de trouver une solution du système du second ordre

$$\forall j \in \{1,\ldots,\mathrm{N}\}, \mathrm{m_j}\ddot{\overrightarrow{\mathrm{q_j}}} = -\mathrm{G}\sum_{\mathrm{k}\in\{1,\ldots,\mathrm{N}\}\setminus\{\mathrm{j}\}} \frac{\mathrm{m_j m_k}\left(\overrightarrow{\mathrm{q_j}} - \overrightarrow{\mathrm{q_k}}\right)}{\|\overrightarrow{\mathrm{q_j}} - \overrightarrow{\mathrm{q_k}}\|^3}$$

où G est la constante gravitationnelle, m_1, m_2, …, m_N sont des constantes représentant les masses des N particules, et q_1, q_2, …, q_N sont leurs vecteurs position (à trois dimensions) dépendant du temps t.

Cette équation est simplement **la seconde loi du mouvement de Newton** ; le terme de gauche est le produit de la masse de la particule et de son accélération, tandis que le terme de droite est la somme des forces gravitationnelles qui s'exercent sur la particule. Ces forces sont proportionnelles aux masses concernées et varient proportionnellement à l'inverse du carré de la distance de ces masses. Puisqu'il faut tenir compte de la direction de ces forces (pour les mesurer par un produit scalaire avec un des vecteurs unitaires du repère spatial dans lequel on mesure aussi les accélérations subies par chaque particule), il faut insérer un $q_j - q_k$ au numérateur et le compenser par un cube au dénominateur (et non plus un simple carré).

https://arxiv.org/pdf/physics/0203001.pdf

Malte Henkel *Sur la solution de Sundman du problème des trois corps.* 2002.

[…] Considérons un ensemble de n particules ponctuelles qui exercent des forces gravitationnelles l'un sur l'autre. Admettons qu'elles ont les masses mi, où i = 1, 2, . . . , n et que leurs positions sont décrites à l'aide des vecteurs ri(t) en fonction du temps t. Les équations newtoniennes du mouvement s'écrivent

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))^2} \cdot \frac{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

où G est la constante gravitationnelle.

Le problème des trois corps s'obtient comme cas spécial n = 3 du problème général des n corps (1). En admettant des conditions initiales pour les positions $\vec{r}_{i,0} = \vec{r}_i(0)$ et les vitesses $\vec{v}_{i,0} = \mathrm{d}\vec{r}_i/\mathrm{d}t(0)$ on s'intéresse à calculer les positions, à partir des équations différentielles (1), pour tous les temps t. Ainsi posé, le problème est mathématiquement complétement défini et sa solution n'utilise que des techniques mathématiques relevant d'un cours de mécanique classique. […]

Il est bien connu qu'il existe des **séries perturbatives capables de représenter les solutions du problème avec une très grande précision**. Pour simplifier considérons le cas n = 3. Imaginons qu'un des trois corps est le soleil et les deux autres des planètes. En première approximation, on néglige les forces gravitationnelles entre les deux planètes, parce que leur masse est beaucoup plus petite que celle du soleil.14 Dans cette approximation, l'eq. (1) se décompose en deux problèmes à deux corps et s'intègre. Ensuite, on rajoute les forces entre les planètes en les traitant comme **une petite perturbation de la solution approximative** obtenue auparavant. On trouve une meilleure approximation "proche" de la première. En répétant cette procédure, on obtient des expressions pour les $\vec{r}_i(t)$ sous forme d'une série. […]